

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

кафедра общей физики и физики конденсированного состояния

Методическая разработка

по общему физическому практикуму

Лаб. работа № 11

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛ И
ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ
КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Описание составил доцент Белов Д.В.

Москва - 2012

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Целью работы является определение момента инерции тел и проверка теоремы о параллельных осях методом крутильных колебаний.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА



Рис.1

Если для однородных тел простой формы момент инерции можно без особых затруднений вычислить теоретически, т.е. по определению, то для тел сложной формы или с неравномерным распределением массы прямой теоретический расчет может оказаться сложным и даже практически неосуществимым. Поэтому большой интерес представляют экспериментальные методы определения момента инерции. Один из них - метод крутильных колебаний трифилярного подвеса - изучается в настоящей задаче.

Трифилярный подвес представляет собой круглую платформу, подвешенную на трех нитях к неподвижному диску меньшего радиуса (рис.1). Если платформу, пустую или с грузом, повернуть на малый угол вокруг вертикальной оси и отпустить, то она будет совершать движение,

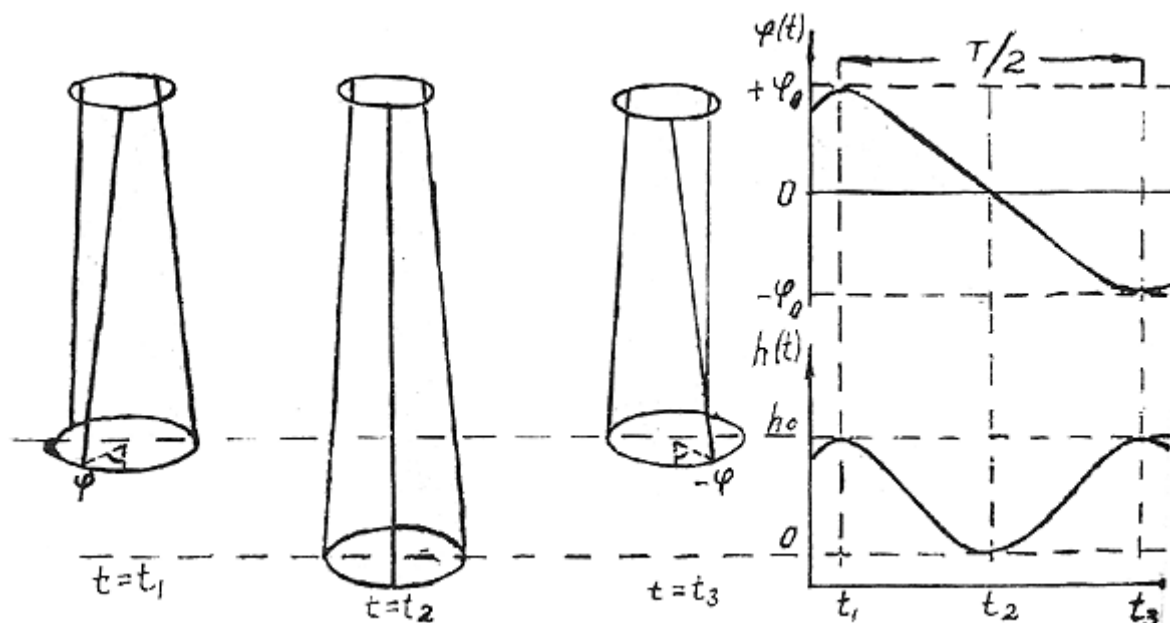


Рис.2

представляющее собой два одновременно происходящих колебания: колебание "вверх-вниз" в вертикальном направлении и крутильное колебание относительно вертикальной оси симметрии подвеса. Легко видеть, что период T крутильных

Угловая скорость ω , согласно определению, выразится так:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$$

Из последней формулы, полагая $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) = 1$, для максимального значения ω имеем:

$$\omega_0 = \varphi_0 \frac{2\pi}{T}$$

Подставляя это выражение в формулу (1), получим

$$mgh_0 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left(\frac{2\pi\varphi_0}{T}\right)^2 \quad (2)$$

Наконец, найдем связь между величинами h_0 и φ_0 в формуле (2). На рис. 3 изображены положения точки закрепления нити в момент прохождения положения равновесия (A) и в момент максимального подъема (A_1). Здесь $R = AO = A_1O_1$ - радиус платформы; $r = C_1O_1$ - радиус верхнего диска; $l = AB = A_1B$ - длина нити; $h_0 = OO_1 = CC_1$ - максимальная высота подъема; φ_0 - максимальный угол поворота. Как видно из рисунка, $h_0 = CC_1 = BC - BC_1$. Используем формулу для разности квадратов:

$$h_0 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}. \quad (3)$$

Входящие сюда величины легко вычислить: $(BC)^2$ найдем по теореме Пифагора из треугольника ABC

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2, \quad (4)$$

$(BC_1)^2$ выразим по теореме Пифагора из $\triangle A_1BC_1$, используя также теорему косинусов для стороны A_1C_1 треугольника $A_1C_1O_1$

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi_0). \quad (5)$$

При малых углах отклонения и при условии $R \sim r$ выражение в знаменателе формулы (3)

$$BC + BC_1 \sim 2l. \quad (6)$$

Подставляя полученные выражения (4)-(6) в формулу (3), имеем:

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \varphi_0)}{2l} = \frac{2Rr \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{l}.$$

Так как для малых углов $\sin \alpha \sim \alpha$, то $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\varphi_0^2}{4}$, так что

$$h_0 = \frac{Rr\varphi_0^2}{2l} \quad (7)$$

Подставляя соотношение (7) в формулу (2), получим:

$$mg \frac{Rr\varphi_0^2}{2l} = \frac{1}{2} J \frac{4\pi^2 \varphi_0^2}{T^2}$$

откуда

$$J = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2 \quad (8)$$

По этой формуле, зная соответствующие параметры системы и измерив период колебаний, можно вычислять моменты инерции.

Упражнение 1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ПУСТОЙ ПЛАТФОРМЫ

Предварительно успокоив платформу, сообщают ей слабый вращательный импульс, слегка дернув за веревку, прикрепленную к верхнему диску. Амплитуда возникших крутильных колебаний должна быть столь малой, чтобы максимальное отклонение точки закрепления нити в каждую сторону не превышало 1 см, поскольку при больших амплитудах колебания могут существенно отличаться от гармонических. Кроме того, следует по возможности избегать поперечных колебаний платформы. В один из моментов, соответствующих максимальному отклонению платформы от положения равновесия, включают секундомер и измеряют время t двадцати полных колебаний. Чтобы исключить возможную ошибку в счете числа колебаний, опыт повторяют пять раз, добиваясь того, чтобы измеренные значения времени t отличались друг от друга не более, чем на (0,2-0,4) с.

Чтобы избежать вычисления периода колебаний и упростить процедуру оценки погрешности, целесообразно ввести в формулу (8) вместо периода T непосредственно измеряемое время t ($T = t/20$)

$$J_{nl} = \frac{mgRrt^2}{1600\pi^2 l} \quad (8a)$$

Подставляя сюда в единицах СИ среднее значение t и других величин, входящих в формулу (указаны в табличке на столе), вычисляют момент инерции платформы J_{nl} . Оценив погрешности, записывают окончательный результат

$$J_{nl} = (... \pm ...) \text{ кг м}^2 ; \quad \frac{\Delta J}{J} = ... \%$$

Упражнение 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ЦИЛИНДРА ОТНОСИТЕЛЬНО ЕГО ОСИ

Два одинаковых цилиндра массой M каждый располагают на платформе один на другом так, чтобы их оси совпадали с осью симметрии платформы - для этой цели на платформе нанесена система концентрических окружностей. Формула (8a), где в качестве массы системы теперь следует взять сумму масс ($m + 2M$) платформы m и двух цилиндров $2M$, определит момент инерции всей системы, т.е. сумму момента инерции платформы J_{nl} и двух одинаковых моментов инерции J_0 цилиндров относительно их осей

$$J_{nl} = 2J_0 = \frac{(m + 2M)gRrt^2}{1600\pi^2 l}$$

Отсюда для искомого момента инерции цилиндра относительно его оси имеем

$$J_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{(m + 2M)gRrt^2}{1600\pi^2 l} - J_{nl} \right] \quad (8б)$$

Суммарная масса двух цилиндров $2M$ определяется взвешиванием. Время t двадцати колебаний системы измеряется так же, как в упражнении I.

Оценив погрешности, представляют окончательный результат в виде

$$J_0 = (... \pm ...) \text{ кг м}^2 ; \quad \frac{\Delta J_0}{J_0} = ... \%$$

Рекомендуется также, измерив диаметр цилиндра D , рассчитать момент инерции цилиндра по теоретической формуле $J_0 = 1/2 m (D/2)^2$ и результаты сопоставить.

Упражнение 3

ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЯХ

Располагают цилиндры по обе стороны от оси платформы так, чтобы их центры находились на одной прямой с центром платформы на одинаковых расстояниях от него (рис.4). Определяют расстояние d от оси цилиндров до оси вращения:

$$d = \frac{D' - D}{2}$$

где D - диаметр цилиндра, а D' - расстояние между максимально удаленными друг от друга точками цилиндров. Диаметр D измеряется штангенциркулем, расстояние D' - линейкой.

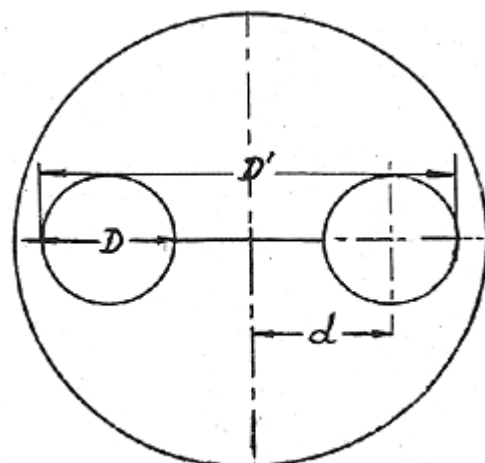


Рис.4

Точно так же, как в предыдущем упражнении, измеряют в пяти опытах время t двадцати колебаний системы и по формуле (8b) вычисляют момент инерции

$J_{\text{эсп}}$ цилиндра относительно оси, параллельной оси цилиндра и отстоящей на расстоянии d от нее.

Затем рассчитывают тот же момент инерции теоретически, пользуясь теоремой о параллельных осях

$$J_{\text{теор}} = J_0 + Md^2$$

Входящие сюда масса цилиндра M и расстояние d измерены ранее, а момент инерции J_0 цилиндра относительно его оси вычислен в упражнении 2.

Оценив погрешности для обоих способов, сопоставляют результаты

$$J_{\text{эсп}} = (... \pm ...) \text{ кг м}^2 ; \quad \frac{\Delta J_0}{J_0} = ... \%$$

$$J_{\text{теор}} = (... \pm ...) \text{ кг м}^2 ; \quad \frac{\Delta J_0}{J_0} = ... \%$$

Упражнение 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ОТНОСИТЕЛЬНО ЕГО ОСЕЙ СИММЕТРИИ

Располагая параллелепипед на платформе так, чтобы с осью симметрии подвеса совпадала одна из его осей симметрии, например, ось 1 на рис.5, определяют его момент инерции J_1 относительно этой оси тем же способом, каким определялся момент инерции цилиндра в упражнении 2, по формуле

$$J_1 = \frac{(m + M) g R r t^2}{1600 \pi^2 l} - J_{nl}.$$

Масса параллелепипеда M определяется взвешиванием.

Аналогично находят моменты инерции J_2 и J_3 параллелепипеда относительно осей 2 и 3. Оценивают погрешности и результаты представляют в виде

$$J_1 = (... \pm ...) \text{ кг м}^2 ; \quad \frac{\Delta J_1}{J_1} = ... \%$$

$$J_2 = (... \pm ...) \text{ кг м}^2 ; \quad \frac{\Delta J_2}{J_2} = ... \%$$

$$J_3 = (... \pm ...) \text{ кг м}^2 ; \quad \frac{\Delta J_3}{J_3} = ... \%$$

Рекомендуется, измерив стороны параллелепипеда, вычислить эти же моменты инерции J_1 , J_2 и J_3 теоретически и, оценив погрешности, сопоставить с результатами, полученными экспериментальным методом.

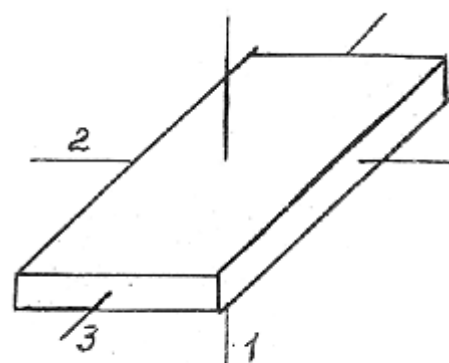


Рис.5

ЗАМЕЧАНИЕ: Оценка всех погрешностей в этой задаче представляет собой довольно трудоемкую операцию, поэтому вычисление некоторых погрешностей, по согласованию с преподавателем, можно опустить.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение момента инерции материальной точки и твердого тела конечных размеров относительно оси. В каком случае тело можно считать материальной точкой?
2. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера о параллельных осях. Относительно какой оси (из всевозможных осей заданного направления) момент инерции тела минимален?
3. Запишите и прокомментируйте уравнение моментов (уравнение вращательного движения твердого тела относительно оси); поясните, как из него вытекает физический смысл момента инерции. Дайте определение момента силы относительно оси.

4. Сформулируйте закон сохранения механической энергии. Объясните, почему он выполняется в условиях данной задачи.
5. Выведите расчетную формулу для момента инерции платформы. Чем следует заменить массу платформы в этой формуле, если при проведении опыта на платформе находятся тела?
6. Дайте определение угловой скорости и углового ускорения.
7. Напишите формулу гармонического колебания и дайте определения его характеристикам (период, частота, круговая (циклическая) частота, амплитуда, фаза).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов Д.В. «Механика», изд. Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова 1998, глава IV – Движение абсолютно твердого тела, §§ 17, 19 до стр. 71.
2. Савельев И.В. Курс физики, т.1. М.: Наука, 1989. §§ 26, 27, 31, 32, 33.
3. Савельев И. В. «Курс общей физики» в 5-и книгах.
Книга I «Механика» 1998 г.,
гл. 5, Механика твердого тела,
§ 5.3 Вращение тела вокруг неподвижной оси,
§5.4 Момент инерции.