

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

кафедра общей физики и физики конденсированного состояния

Методическая разработка

по общему физическому практикуму

Лаб. работа № 12

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ
КОЛЕСА**

Описание составил доцент Белов Д.В.

Москва - 2012

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КОЛЕСА

Цель работы заключается в измерении момента инерции велосипедного колеса двумя различными способами.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

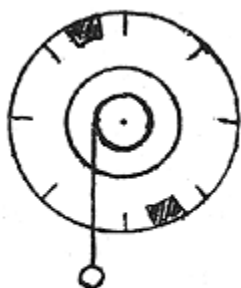


Рис.1

Велосипедное колесо может вращаться вокруг горизонтальной оси (рис.1). На шкив, жестко связанный с колесом, намотана нить; один ее конец закреплен на шкиве, а к другому концу привязан тяжелый металлический шар. В двух диаметрально противоположных точках на внутренней стороне обода колеса имеются ячейки, в которые можно помещать этот шар. Угол отклонения колеса определяется по положению указателя, связанного с колесом, на угломерной шкале.

Упражнение 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КОЛЕСА МЕТОДОМ КОЛЕБАНИЙ

Дополнительная теория

Если шарик поместить в одну из ячеек, то центр тяжести системы "колесо + шарик" не будет находиться на оси вращения, и мы имеем типичный физический маятник.

Будучи выведен из положения равновесия, маятник начнет совершать приблизительно гармонические колебания, круговая частота которых определяется формулой

$$\omega^2 = \frac{mgL}{J}, \quad (1)$$

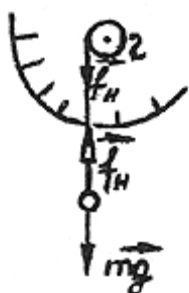


Рис.2

где g - ускорение свободного падения, J - момент инерции маятника, L - расстояние от оси вращения до центра шарика, m - масса шарика, (а не масса всего маятника и, соответственно, расстояние от оси вращения до центра масс маятника, как в общей теории физического маятника). Это связано с тем, что в данном случае момент сил тяжести сводится лишь к моменту $M = mgl \sin \varphi$ сил тяжести, действующих на шарик; момент сил тяжести, действующих на колесо, равен нулю, так как вследствие симметрии колеса его центр тяжести находится на оси вращения.

Момент инерции J маятника относительно оси вращения складывается из

моментов инерции колеса J_k и шарика $J_{ш}$:

$$J = J_k + J_{ш} \quad (2)$$

Так как размеры шарика существенно меньше расстояния до оси вращения, то его можно считать материальной точкой, так что $J_{ш} = mL^2$ и полный момент инерции маятника запишется в виде

$$J = J_k + mL^2 \quad (3)$$

Подставляя это выражение в формулу (1), имеем

$$\omega^2 = \frac{mgL}{J_{ш} + mL^2}$$

Выражая круговую частоту ω через период колебаний T по формуле $\omega = 2\pi/T$, находим

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgL}{J_k + mL^2}$$

откуда для момента инерции колеса получаем формулу

$$J_k = mL^2 \left(\frac{gT^2}{4\pi^2 L} - 1 \right) \quad (4)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Для вычисления момента инерции колеса по формуле (4) необходимо измерить значения величин m , L и T . Масса m шарика указана в табличке на стене. Для определения расстояния L от центра шарика до оси вращения рекомендуется сначала измерить кратчайшее расстояние между поверхностями шарика и втулки и прибавить к нему сумму радиусов шарика и втулки, измерив диаметры последних штангенциркулем. Для определения периода колебаний T измеряется время t двадцати колебаний. Колебания возбуждают, отклоняя колесо на небольшой (не более 10°) угол от положения равновесия и отпуская. Если из-за большого трения колесо останавливается прежде, чем совершится 20 колебаний, то увеличивают начальное отклонение колеса до $15-20^\circ$. Чтобы исключить возможную ошибку в счете числа колебаний, опыт повторяют не менее пяти раз, добиваясь того, чтобы измеренные значения времени t отличались друг от друга не более чем на $0,2-0,4$ с.



Рис. 3

Чтобы избежать вычисления периода колебаний и упростить процедуру оценки погрешности, целесообразно выразить в формуле (4) период через непосредственно измеряемое время ($T = t/20$):

$$J_{\kappa} = mL^2 \left(\frac{gt^2}{1600\pi^2 L} - 1 \right) \quad (4a)$$

Подставляя в эту формулу значения величин m , L , t и $g=9/81 \text{ м/с}^2$ вычисляют J_{κ} . Оценивают погрешности и окончательный результат представляют в виде

$$J_k = (... \pm ...) \text{ кг м}^2; \quad \frac{\Delta J_k}{J_k} = \dots \%$$

Упражнение 2 (Первый вариант) ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КОЛЕСА МЕТОДОМ ВРАЩЕНИЯ (без учета сил трения).

Дополнительная теория

Если, вынув шарик из ячейки, намотать нить на шкив и отпустить шарик, то он начнет опускаться, приводя колесо во вращение. Предполагая нить невесомой и нерастяжимой и пренебрегая силами трения, напишем уравнения движения шарика и колеса: для шарика - второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось и для колеса - уравнение моментов относительно оси вращения. Дополним уравнения движения уравнением кинематической связи между ускорениями шарика и колеса.

$$\left. \begin{aligned} ma &= mg - f_H \\ J_{\kappa} \beta &= f_H r, \\ a &= \beta r \end{aligned} \right\}$$

Здесь a - ускорение шарика, g - ускорение свободного падения, f_H - сила натяжения нити, β - угловое ускорение колеса, r - радиус шкива; силы, действующие в этих уравнениях, изображены на рис.2. Последнее равенство получается из соотношения $a_{\tau} = \beta r$ между тангенциальным a_{τ} и угловым β ускорениями точки поверхности шкива, если учесть, что это тангенциальное ускорение равно ускорению шарика : $a_{\tau} = a$. Исключая из этой системы неизвестные β и f_H , находим ускорение шарика

$$a = \frac{g}{1 + \frac{J_{\kappa}}{mr^2}},$$

откуда

$$J_{\kappa} = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right).$$

Так как ускорение шарика - a постоянно, то его можно выразить по известной формуле равноускоренного движения

$$h = \frac{at^2}{2}$$

через путь h шарика и время движения t :

$$a = \frac{2h}{t^2}.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, находим окончательную формулу для момента инерции колеса

$$J_k = \frac{mD^2}{4} \left[\frac{gt^2}{2h} - 1 \right], \quad (5)$$

где вместо радиуса введен диаметр шкива $D = 2r$.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Для вычисления момента инерции колеса по формуле (5), необходимо измерить величины D , h и t .

Диаметр D шкива измеряют штангенциркулем не менее пяти раз в различных местах..

Путь h можно измерить как расстояние от нижней точки поверхности шкива до верхней точки шарика в его наинизшем положении, когда нить полностью размотана (рис.3). Такое определение h предполагает, что в начальный момент, когда шарик отпускают и включают секундомер, верхняя точка шарика должна находиться на одном уровне с нижней точкой поверхности шкива (рис.3), а выключать секундомер следует в момент достижения шариком наинизшей точки его пути.

Опыт с опусканием шарика повторяют не менее пяти раз.

Подставляя значения m , D , h и t в формулу (5), вычисляют момент инерции колеса. Оценивают погрешности измерений, причем при выводе формулы для погрешности единиц в скобках формулы (5) можно пренебречь, так как при условиях опыта

$$\frac{gt^2}{2h} \gg 1$$

Как окончательный итог, сопоставляют результаты обоих методов:

метод вращения: $J_k = (... \pm ...) \text{ кг м}^2$; $\frac{\Delta J_k}{J_k} = ... \%$.

метод колебаний: $J_k = (... \pm ...) \text{ кг м}^2$; $\frac{\Delta J_k}{J_k} = ... \%$.

Упражнение 2

(Второй вариант)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КОЛЕСА

(с учетом сил трения)

Дополнительная теория

Пренебрежение силами трения допустимо лишь в том случае, если связанная с их неучетом систематическая погрешность меньше погрешности метода измерения. В противном случае силами трения пренебрегать нельзя. Ниже излагается способ определения момента инерции колеса с учетом сил трения. Речь идет о силах трения в оси колеса. Прочие силы трения, в частности, силы сопротивления воздуха, ввиду их малости, практически не сказываются на результатах опыта.

В этом случае система уравнений, описывающая движение шарика и колеса, будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} ma &= mg - f_h, \\ J_\kappa \beta &= f_h r - M_{mp}, \\ a &= \beta r. \end{aligned} \right\}$$

Считая момент сил трения $M_{тр}$ постоянным и проводя аналогичные выкладки, приходим вместо формулы (5) к следующей формуле для момента инерции колеса

$$J_{\kappa} = \frac{1}{4} m D^2 \left(\frac{g t^2}{2h} \left(1 - \frac{M_{mp}}{mgr} \right) - 1 \right). \quad (6)$$

Момент сил трения $M_{тр}$ можно определить, пользуясь законом изменения механической энергии. После того как шарик опустится на полную длину нити,

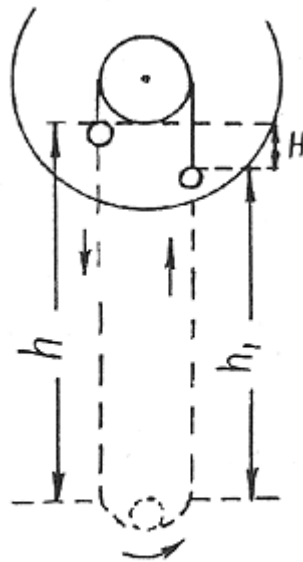


Рис. 4

колесо будет продолжать вращаться в прежнем направлении, нить будет наматываться на шкив и шарик поднимется вверх на некоторую максимальную высоту h_l (рис.4). Так как кинетическая энергия шарика в начальном (на высоте h) и конечном (на высоте h_l) положениях равна нулю, то изменение полной механической энергии шарика ΔE определится изменением его потенциальной энергии

$$\Delta E = mgh - mgh_l. \quad (7)$$

Работа сил трения

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{mp} d\varphi$$

в нашем случае ($M_{mp} = const$) принимает простой вид:

$$A = M_{mp} \varphi, \quad (8)$$

где φ - полный угол, на который повернулось колесо за время перехода шарика из начального в конечное состояние. Легко видеть, что

$$\varphi = \frac{h + h_l}{r}. \quad (9)$$

Действительно, $\varphi = l / r$, где l - полный путь, пройденный какой-либо точкой поверхности шкива, и этот путь равен пути $h + h_l$, пройденному шариком. С учетом (9) формула (8) для работы сил трения примет вид

$$A = M_{mp} \frac{h + h_l}{r}. \quad (10)$$

Согласно закону изменения механической энергии

$$\Delta E = A. \quad (11)$$

Подставляя сюда выражения (7) и (10) для ΔE и A , имеем

$$mg(h - h_l) = M_{mp} \frac{h + h_l}{r},$$

откуда

$$M_{mp} = mgr \frac{h - h_l}{h + h_l}. \quad (12)$$

Подставляя это выражение в формулу (6), окончательно имеем

$$J_K = \frac{1}{4} mD^2 \left[\frac{gt^2}{2h} \left\{ 1 - \frac{h - h_l}{h + h_l} \right\} - 1 \right]. \quad (13)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Измерения проводятся так же, как в первом варианте упражнения 2 с той лишь разницей, что теперь, кроме времени опускания шарика t , необходимо измерять также высоту h_1 его последующего подъема. Эту высоту рекомендуется находить следующим образом. Когда шарик достигнет наивысшей точки подъема и колесо остановится, фиксируют положение колеса рукой и измеряют расстояние H от верхней точки шарика до шкива (рис.4). Очевидно, $h_1 = h - H$.

Подставляя значения измеренных величин в формулу (13), вычисляют момент инерции колеса с учетом сил трения.

При выводе формулы для погрешности можно использовать для момента инерции приближенную формулу

$$J_k = \frac{mD^2 gt^2}{8h},$$

поскольку

$$\frac{gt^2}{2h} \gg 1 \quad \text{и} \quad \frac{h - h_1}{h + h_1} \ll 1.$$

Тем самым погрешности ΔJ_k в обоих вариантах упражнения 2 оказываются одинаковыми.

Оценив погрешности, представляют окончательные результаты, выписав рядом для удобства сопоставления результат, полученный методом колебаний:

метод вращения: без учета $J_k = (... \pm ...) \text{ кг м}^2; \quad \frac{\Delta J_k}{J_k} = ...\%.$

сил трения

с учетом $J_k = (... \pm ...) \text{ кг м}^2; \quad \frac{\Delta J_k}{J_k} = ...\%.$

сил трения

метод колебаний: $J_k = (... \pm ...) \text{ кг м}^2; \quad \frac{\Delta J_k}{J_k} = ...\%.$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение момента инерции мат. точки и твердого тела конечных размеров относительно оси. В каком случае тело можно считать материальной точкой?

2. Запишите и прокомментируйте уравнение моментов (уравнение вращательного движения твердого тела относительно оси) и поясните, как из него вытекает физический смысл момента инерции. Дайте определение момента силы относительно оси.
3. Запишите уравнение моментов для свободных колебаний колеса с шариком. Как из него получается формула для круговой частоты этих колебаний?
4. Напишите и прокомментируйте систему уравнений (в упр. 2), из которой получается расчетная формула для момента инерции колеса (без учета сил трения). Воспроизведите вывод этой формулы.
5. То же с учетом сил трения.
6. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов Д.В. «Механика», изд. Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова 1998, глава IV – Движение абсолютно твердого тела, §§ 17 -19 до стр. 71, глава VIII –Механические колебания § 36 Физический и математический маятники, стр. 116- 118.
2. Савельев И.В. Курс физики, т.I. М.: Наука, 1989. §§ 26, 27, 31, 32.
3. Савельев И. В. «Курс общей физики» в 5-и книгах.
Книга I «Механика» 1998 г.,
гл. 5, Механика твердого тела,
§ 5.3 Вращение тела вокруг неподвижной оси,
§ 5.4 Момент инерции »,
гл. 8, Колебательное движение,
§ 8.1 Общие сведения о колебаниях,
§ 8.4 Гармонические колебания.