

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**имени М. В. Ломоносова**

---

**Физический факультет**  
**кафедра общей физики и физики конденсированного состояния**

**Методическая разработка**  
**по общему физическому практикуму**

**Лаб. работа № 2**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ**  
**ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА И**  
**ПЛОТНОСТИ ВЕЩЕСТВА,**  
**ИЗ КОТОРОГО ОН ИЗГОТОВЛЕН**

**Работу поставил доцент Пустовалов Г.Е.**

**Москва - 2012**

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА И ПЛОТНОСТИ ВЕЩЕСТВА, ИЗ КОТОРОГО ОН ИЗГОТОВЛЕН

**Цель работы:** производится ознакомление с простейшими измерительными приборами - штангенциркулем, микрометром, техническими весами и секундомером. На примере определения периода колебаний физического маятника простой геометрической формы по его размерам, а также плотности вещества, из которого он изготовлен, изучаются основные приемы учета погрешностей измерений.

Задача также может быть использована в разделах «Вращение твердого тела» и «Колебания».

**Приборы и принадлежности:** диск, изготовленный из однородного вещества, подставка для диска; штангенциркуль, микрометр, секундомер, технические весы, набор разновеса.

Предварительно следует ознакомиться с разделами «Погрешности измерений» и «Простейшие измерительные приборы». По окончании измерений следует представить отчет в соответствии с формой, приведенной в разделе «Рекомендуемая форма отчета» (см. описание к задаче №1).

## ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

**Физическим маятником** называется твердое тело произвольной формы, которое может вращаться вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела. Маятник находится в устойчивом равновесии, если его центр масс находится ниже оси на вертикальной прямой, проходящей через ось. Выведенный из положения равновесия маятник совершает колебания под действием момента силы тяжести. Если при колебаниях линия, проходящая через центр масс маятника и ось отклоняется от вертикали на угол, величина которого, выраженная в радианах, мала по сравнению с единицей, то зависимость этого угла от времени близка к гармонической. В этом случае зависимость периода колебаний  $T$  от величин, характеризующих маятник, имеет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgd}}, \quad (1)$$

где  $J$  - момент инерции маятника относительно оси вращения,  $d$  - расстояние от оси до центра масс маятника,  $M$  - его масса и  $g$  - ускорение свободного падения.

Момент инерции представляет собой физическую величину, характеризующую инертные свойства твердого тела при его вращении вокруг оси. Он зависит от распределения массы тела относительно оси. По определению он равен

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2, \quad (2)$$

где  $\Delta m_i$  - масса элемента тела,  $r_i$  - расстояние от оси до этого элемента. Для сплошных тел момент инерции вычисляется по заданному распределению плотности тела с помощью интегрирования по объему тела. Эти вычисления сравнительно просты для однородных симметричных тел, если момент инерции вычисляется относительно оси симметрии. В данной работе в качестве физического маятника используется однородный диск, колеблющийся вокруг оси, перпендикулярной его плоскости. Момент инерции однородного диска с диаметром  $D$  и массой  $M$  относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр масс, равен

$$J_0 = \frac{1}{8} MD^2. \quad (3)$$

Однако ось, вокруг которой вращается физический маятник при колебаниях, не проходит через центр масс. В этом случае следует воспользоваться теоремой Гюйгенса-Штейнера: момент инерции  $J$  относительно оси вращения маятника

$$J = J_0 + Md^2, \quad (4)$$

где  $J_0$  - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной оси вращения диска,  $M$  - масса тела, а  $d$  - расстояние между этими осями. Из формул (3) и (4) получим

$$J = \frac{1}{8} M(D^2 + 8d^2). \quad (5)$$

Подставив значение момента инерции (5) в формулу (1), найдем выражение для периода колебаний диска вокруг оси, перпендикулярной его плоскости

$$T = \pi \sqrt{\frac{D^2 + 8d^2}{2gd}}. \quad (6)$$

Таким образом, период колебаний диска не зависит от его массы и определяется только геометрическими параметрами: диаметром диска  $D$  и расстоянием  $d$  между центром диска и осью вращения маятника.

## Упражнение 1

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

#### Описание установки

Изучаемый в данной работе физический маятник представляет собой *сплошной однородный диск*, на каждой стороне которого нанесены *диаметр АВ* и *хорда EF* (рис.1). На пересечении диаметра и хорды в точке *O* на каждой из сторон диска имеются *конические углубления*, находящиеся друг против друга.

Подставка для закрепления маятника (рис.2) имеет *два конуса: неподвижный 1 и подвижный 2*. Вершины конусов располагаются на одной горизонтальной линии. *Винт 3* служит для закрепления подвижного конуса.

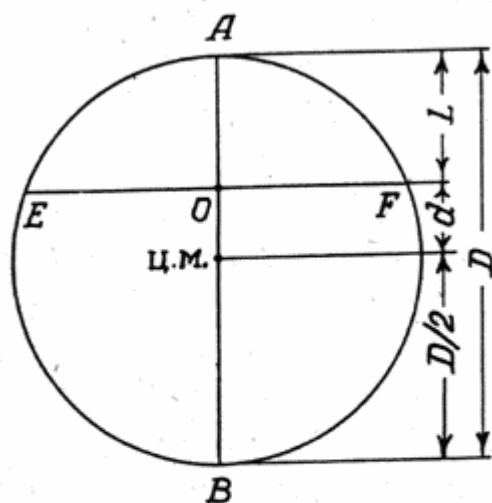


Рис.1

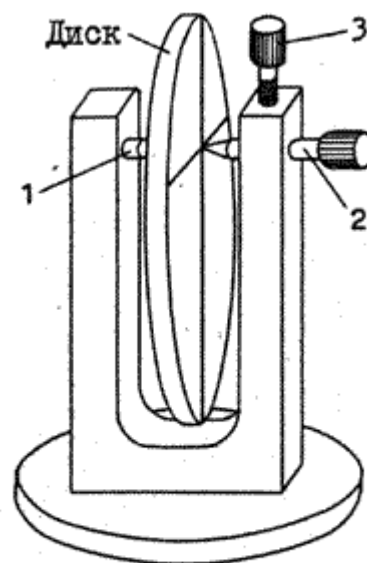


Рис.2

#### Измерения

##### Измерение геометрических параметров

Измеряют штангенциркулем не менее пяти раз в различных местах диаметр *D* диска. Если при этом каждый раз получается одно и то же значение, то за

полную абсолютную погрешность измерения принимают приборную погрешность штангенциркуля. В противном случае результаты измерений заносят в таблицу, имеющую вид таблицы 1 раздела «Рекомендуемая форма отчета».

Не менее трех раз измеряют штангенциркулем длину  $L$  отрезка  $AO$  (см. рис.1) с одной стороны диска и столько же раз - с другой. Результаты измерений заносятся в таблицу вышеупомянутой формы.

### **Измерение периода колебаний маятника**

Закрепляют диск на подставке. Для этого, освобождают винт 3 и отодвигают подвижный конус от неподвижного на расстояние, несколько превышающее толщину диска. Диск вставляют в промежуток между конусами так, чтобы острие неподвижного конуса вошло в углубление на обращенной к нему стороне диска. Затем острие подвижного конуса вдвигают в углубление на другой стороне диска до упора и подвижный конус закрепляют винтом 3.

Выводят диск из положения равновесия так, что нижняя точка диска отклонялась на 2-3 см от вертикальной линии, и проверяют, достаточно ли свободно происходят его колебания. Если диск до полной остановки совершает менее 15 колебаний, то, освободив винт 3, чуть-чуть выдвигают подвижный конус и снова вдвигают его до упора в углубление на диске, но уже с меньшим нажимом, чем это делалось ранее. Конус снова закрепляют винтом 3. При этом диск следует придерживать рукой, оберегая от падения и повреждения остриями конусов. Снова проверяют, достаточно ли свободно качается диск. При необходимости затяжку подвижного конуса проводят еще раз.

Приводят диск в колебания, и измеряют секундомером время  $t$  десяти колебаний. Такие измерения проделывают  $n$  раз ( $n = 5 \div 10$  по указанию преподавателя), занося значение  $t$  в таблицу, имеющую вид таблицы 1 раздела «Рекомендуемая форма отчета» (см. описание к задаче №1).

. Для получения значения периода  $T$  и его погрешности время  $t$  и его полную абсолютную погрешность  $\Delta t$  делят на  $n$ .

### **Вычисление периода колебаний маятника по измеренным геометрическим размерам**

Пользуясь рис.1, легко найти, что расстояние между осью вращения маятника и его центром масс равно

$$d = \frac{D}{2} - L. \quad (7)$$

Подставив  $d$  в формулу (6), получим для измерения периода колебаний диска по измеренным параметрам выражение

$$T = \pi \sqrt{\frac{D^2 + 2(D - 2L)^2}{(D - 2L)g}}. \quad (8)$$

Целесообразно ввести обозначения:

$$A = D - 2L, \quad (9)$$

$$B = D^2 + 2(D - 2L)^2 = D^2 + 2A^2. \quad (10)$$

Сначала вычисляют значения  $A$  и  $B$ . Затем по формуле

$$T = \pi \sqrt{\frac{B}{Ag}} \quad (11)$$

рассчитывают искомое значение периода  $T$ . При расчете ускорение свободного падения на широте Москвы принимается равным

$$g = (9,816 \pm 0,006) \text{ м/с}^2.$$

### Оценка погрешностей в значении периода

Прежде всего должны быть найдены полные абсолютные погрешности непосредственно измеряемых величин  $D$  и  $L$ .

Нахождение погрешности величины  $T$ , измеряемой косвенно лучше начинать с вычисления относительной погрешности. Логарифмируя формулу (8), получим

$$\ln T = \ln \pi + \frac{1}{2} \ln[D^2 + 2(D - 2L)^2] - \frac{1}{2} \ln(D - 2L) - \frac{1}{2} \ln g. \quad (12)$$

Считая, что при вычислениях на калькуляторе погрешность значения  $\pi$  пренебрежимо мала, определим частные относительные погрешности величины  $T$ , обусловленные погрешностями  $D$ ,  $L$  и  $g$ . Для этого найдем частные производные  $\ln T$  по этим величинам, приняв их за переменные и учитывая обозначения (9) и (10):

$$\frac{\partial(\ln T)}{\partial D} = \frac{D + 2(D - 2L)}{D^2 + 2(D - 2L)^2} - \frac{1}{2(D - 2L)} = \frac{D + 2A}{B} - \frac{1}{2A}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial(\ln T)}{\partial L} = -\frac{4(D - 2L)}{D^2 + 2(D - 2L)^2} + \frac{1}{D - 2L} = \frac{1}{A} - \frac{4A}{B}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial(\ln T)}{\partial g} = -\frac{1}{2g}. \quad (15)$$

Умножив (13), (14) и (15) на  $\Delta D$ ,  $\Delta L$  и  $\Delta g$  соответственно и возведя в квадрат полученные выражения, найдем квадраты частных погрешностей:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_D^2 = \left(\frac{D+2A}{B} - \frac{1}{2A}\right)^2 (\Delta D)^2, \quad (16)$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_L^2 = \left(\frac{1}{A} - \frac{4A}{B}\right)^2 (\Delta L)^2, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_g^2 = \left(\frac{\Delta g}{2g}\right)^2. \quad (18)$$

Следует найти численные значения этих выражений и выяснить, какая из измеряемых величин  $D$  или  $L$  вносит в результат наибольшую погрешность, а также с достаточной ли точностью взято табличное значение  $g$ .

Извлекая квадратный корень из суммы численных значений (16), (17) и (18), находят полную относительную погрешность  $\Delta T/T$  величины периода колебаний  $T$  данного физического маятника. Умножив относительную погрешность на значение  $T$ , получают полную абсолютную погрешность  $\Delta T$ . Наконец, проведя необходимое округление всех чисел, записывают окончательный результат значения периода  $T$  с учетом погрешности, полученный путем косвенных измерений его геометрических параметров.

### **Оценка погрешности прямого измерения периода маятника**

Заполняют таблицу, в которой занесены результаты измерений периода колебаний маятника секундомером. Записывают окончательное значение периода  $T$  с учетом полной погрешности. Сравнивают это значение со значением периода, полученного путем косвенных измерений. Если измерения проведены правильно, то определяемые погрешностями интервалы должны перекрываться.



## Упражнение 2

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ВЕЩЕСТВА, ИЗ КОТОРОГО ИЗГОТОВЛЕН ДИСК

Как известно, плотность  $\rho$  однородного тела равна отношению массы  $M$  тела к его объему  $V$ . Объем диска  $V = \pi D^2 H / 4$ , где  $D$  - диаметр диска, а  $H$  - его толщина. Таким образом,

$$\rho = \frac{4M}{\pi D^2 H}. \quad (19)$$

Массу  $M$  находят путем взвешивания на технических весах и записывают ее значение с учетом приборной погрешности весов. Измеряют микрометром 10 раз толщину  $H$  диска в разных местах и заносят результаты измерений в таблицу, имеющую вид таблицы 1 раздела «Рекомендуемая форма отчета» (см. описание к задаче №1).

Заполняют все графы таблицы и записывают результат измерения  $H$  с учетом полной погрешности измерения. Для диаметра диска можно воспользоваться значением  $D$  и его погрешностью, полученными в предыдущем упражнении.

Самостоятельно находят формулы для вычисления частных погрешностей в определении плотности, вычисляют относительную и абсолютную погрешности и записывают окончательный результат измерения плотности с учетом погрешности.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Белов Д.В. «Механика», изд. Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова 1998, глава VIII – Механические колебания,  
§ 36 – Свободные колебания, стр. 116 - 119 .
2. Пустовалов Г.Е., «Введение к задачам на колебания», методическая разработка, §§1-3,5,7. (см. работу 3- «Введ. К задачам на колебания» на настоящем диске).
3. Савельев И. В. «Курс общей физики» в 5-и книгах. Книга I «Механика», 1998 г., гл. 8, Колебательное движение,  
§ 8.1 Общие сведения о колебаниях,  
§8.4 Гармонические колебания.